Analisi Matematica 1, Ing. Gestionale 2024-2025 (787AA)
Appello I

07/01/2025

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 1, 07-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE A

1. Determinare l'insieme di definizione di $f(x) = (\cos x)^{x-1}$.

   Sol. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Derivare la funzione $f(x) = (\cos \frac{x}{2})^{x-2}$.

   Sol. $f'(x) = (\cos \frac{x}{2})^{x-2} \left(\log(\cos \frac{x}{2}) - \frac{x-2}{2} \tan \frac{x}{2}\right)$.

3. Dire se la funzione $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-y^2} dy$ è concava o convessa in $x = 1$.

   Sol. $f''(1) = -4e^{-1} < 0$, concava.

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite: $\ell = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x \cos^2 x}$.

   Sol. $\ell = 2$.

5. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to 0^+$

$$\underbrace{\log(x^2)}_{a}, \quad \underbrace{e^{1/x}}_{b}, \quad \underbrace{e^{-1/x}}_{c}, \quad \underbrace{e^{-1/x^3}}_{d}.$$

   Sol. $d \ll c \ll a \ll b$.

6. Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = \log(2 - e^{2x})$.

   Sol. $P_2(x) = -2x - 4x^2$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{2}x}{1 + 2x^4} dx$.

   Sol. $I = \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2}x^2) + c$.

8. Dire se la seguente funzione $f(x) = x^3|x|$ è derivabile in $x_0 = 0$, ed in caso affermativo dare il calore $f'(0)$.

   Sol. È derivabile con derivata nulla in $x_0 = 0$.

9. Utilizzando le operazioni sui grafici, tracciare il grafico qualitativo di $f(x) = 2e^{-|x+1|}$. Indicare sugli assi cartesiani i valori delle coordinate dei seguenti punti: l'intersezione con l'asse delle ordinate, il punto di massimo della funzione.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 1, 07-01-25

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE B

1. Determinare l'insieme di definizione di $f(x) = (\cos \frac{x}{2})^{x-2}$.

   Sol. $x \in (-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Derivare la funzione $f(x) = (\cos \frac{x}{4})^{x-4}$.

   Sol. $f'(x) = (\cos \frac{x}{4})^{x-4} \left(\log(\cos \frac{x}{4}) - \frac{x-4}{4} \tan \frac{x}{4}\right)$.

3. Dire se la funzione $f(x) = \int_{x^2}^{x} e^{-y^2} dy$ è concava o convessa in $x = 1$.

   Sol. $f''(1) = 4e^{-1} > 0$, convessa.

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite: $\ell = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x \cos^3 x}$.

   Sol. $\ell = 3$.

5. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to 0^+$

$$\underbrace{e^{-1/x^4}}_{a}, \qquad \underbrace{e^{1/x}}_{b}, \qquad \underbrace{e^{-1/x}}_{c}, \qquad \underbrace{\log(x^3)}_{d}.$$

   Sol. $a \ll c \ll d \ll b$.

6. Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = \log(2 - e^{3x})$.

   Sol. $P_2(x) = -3x - 9x^2$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $I = \displaystyle\int \frac{2x}{1 + 4x^4} dx$.

   Sol. $I = \frac{1}{2} \arctan(2x^2) + c$.

8. Dire se la seguente funzione $f(x) = x^2|x|$ è derivabile in $x_0 = 0$, ed in caso affermativo dare il calore $f'(0)$.

   Sol. È derivabile con derivata nulla in $x_0 = 0$.

9. Utilizzando le operazioni sui grafici, tracciare il grafico qualitativo di $f(x) = 3e^{-|x-2|}$. Indicare sugli assi cartesiani i valori delle coordinate dei seguenti punti: l'intersezione con l'asse delle ordinate, il punto di massimo della funzione.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 1, 07-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE C

1. Determinare l'insieme di definizione di $f(x) = (\cos\frac{x}{3})^{x-3}$.

   Sol. $x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 6k\pi, \frac{3\pi}{2} + 6k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Derivare la funzione $f(x) = (\cos\frac{x}{6})^{x-6}$.

   Sol. $f'(x) = (\cos\frac{x}{6})^{x-6}\left(\log(\cos\frac{x}{6}) - \frac{x-6}{6}\tan\frac{x}{6}\right)$.

3. Dire se la funzione $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-y^2} dy$ è concava o convessa in $x = -1$.

   Sol. $f''(1) = -8e^{-1} < 0$, concava.

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite: $\ell = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{x\cos^4 x}$.

   Sol. $\ell = 4$.

5. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to 0^+$

$$\underbrace{e^{1/x}}_{a}, \quad \underbrace{e^{-1/x}}_{b}, \quad \underbrace{\log(x^4)}_{c}, \quad \underbrace{e^{-1/x^5}}_{d}.$$

   Sol. $d \ll b \ll c \ll a$.

6. Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = \log(2 - e^{4x})$.

   Sol. $P_2(x) = -4x - 16x^2$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{5}x}{1+5x^4}dx$.

   Sol. $I = \frac{1}{2}\arctan(\sqrt{5}x^2) + c$.

8. Dire se la seguente funzione $f(x) = x^4|x|$ è derivabile in $x_0 = 0$, ed in caso affermativo dare il calore $f'(0)$.

   Sol. È derivabile con derivata nulla in $x_0 = 0$.

9. Utilizzando le operazioni sui grafici, tracciare il grafico qualitativo di $f(x) = 4e^{-|x+3|}$. Indicare sugli assi cartesiani i valori delle coordinate dei seguenti punti: l'intersezione con l'asse delle ordinate, il punto di massimo della funzione.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 1, 07-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE D

1. Determinare l'insieme di definizione di $f(x) = (\cos \frac{x}{4})^{x-4}$.

   Sol. $x \in (-2\pi + 8k\pi, 2\pi + 8k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Derivare la funzione $f(x) = (\cos \frac{x}{8})^{x-8}$.

   Sol. $f'(x) = (\cos \frac{x}{8})^{x-8} \left(\log(\cos \frac{x}{8}) - \frac{x-8}{8} \tan \frac{x}{8}\right)$.

3. Dire se la funzione $f(x) = \int_{x^2}^{x} e^{-y^2} dy$ è concava o convessa in $x = -1$.

   Sol. $f''(1) = 8e^{-1} > 0$, convessa.

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite: $\ell = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x \cos^5 x}$.

   Sol. $\ell = 5$.

5. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to 0^+$

$$\underbrace{e^{-1/x}}_{a}, \qquad \underbrace{e^{-1/x^6}}_{b}, \qquad \underbrace{\log(x^5)}_{c}, \qquad \underbrace{e^{1/x}}_{d}.$$

   Sol. $b \ll a \ll c \ll d$.**Sol.**

6. Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = \log(2 - e^x)$.

   Sol. $P_2(x) = -x - x^2$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $I = \displaystyle\int \frac{3x}{1 + 9x^4} dx$.

   Sol. $I = \frac{1}{2} \arctan(3x^2) + c$.

8. Dire se la seguente funzione $f(x) = x^5|x|$ è derivabile in $x_0 = 0$, ed in caso affermativo dare il calore $f'(0)$.

   Sol. È derivabile con derivata nulla in $x_0 = 0$.

9. Utilizzando le operazioni sui grafici, tracciare il grafico qualitativo di $f(x) = 5e^{-|x-4|}$. Indicare sugli assi cartesiani i valori delle coordinate dei seguenti punti: l'intersezione con l'asse delle ordinate, il punto di massimo della funzione.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 1, 07-01-25

NOME E COGNOME: ________________ **MATRICOLA:** ________________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE I

1. Sia data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\right)$.
   Determinarne dominio, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Calcolare l'area sottesa alla curva nell'intervallo $[4, 5]$.

2. Sia β un parametro reale diverso da zero. Si consideri l'equazione differenziale $\beta x'' + x' + 6x = 2$.
   Determinare per quali valori di β la soluzione dell'omogenea associata è combinazione lineare di funzioni esponenziali.
   Per i valori di β del punto precedente, si determini la soluzione generale dell'equazione non omogenea data.
   Per $\beta = -1$, si determinino i coefficienti c_1 e c_2 tali che $x(0) = x'(0) = 0$.

Sol. 1 $f(x)$ è definita per le x tali che l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$. Le soluzioni sono dunque $x \in (1, 2)$ o $x > 3$. Per $x \to 1^+$ e per $x \to 2^-$ la funzione diverge a $-\infty$ (quindi la funzione è illimitata inferiormente, ovvero $\inf f = -\infty$). Per $x \to 3^+$ la funzione diverge a $+\infty$, (quindi la funzione è illimitata superiormente, ovvero $\sup f = +\infty$). Per $x \to +\infty$ la funzione diverge a $+\infty$.
Funzione né pari né dispari.
La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Quest'ultima è positiva se $x < 3 - \sqrt{2}$ o $x > 3 + \sqrt{2}$, negativa altrimenti. I punti $x = 3 \pm \sqrt{2}$ sono punti dove la derivata si annulla. Appartengono al dominio, e risulta che $x = 3 - \sqrt{2}$ è punto di massimo (relativo), mentre $x = 3 + \sqrt{2}$ è punto di minimo (relativo). Per l'area, bisogna calcolare (usando la formula di integrazione per parti) la primitiva

$$\begin{aligned}
&\int \log\left(\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\right) dx = \int (\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3))dx \\
&= x\log(x-1) - x - \log(x-1) + x\log(x-2) - x - 2\log(x-2) - x\log(x-3) + x + 3\log(x-3) \\
&= (x-1)\log(x-1) - x + (x-2)\log(x-2) - (x-3)\log(x-3).
\end{aligned}$$

Valutando negli estremi si ha che

$$\int_4^5 \log\left(\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\right) dx = 4\log 2 - 1.$$

Sol. 2 L'equazione omogenea associata è $\beta x'' + 2x' + 6x = 0$ con polinomio caratteristico $p(\lambda) = \beta\lambda^2 + \lambda + 6$ avente per radici $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1-24\beta}}{2\beta}$ e $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1-24\beta}}{2\beta}$. Pertanto le β tali che la soluzione generale dell'omogenea è combinazione lineare di funzioni esponenziali devono soddisfare $\beta < \frac{1}{24}$.

La soluzione particolare $\tilde{x}(t)$ della non omogenea va cercata tra le funzioni polinomiali di grado zero, ovvero le costanti. Imponendo dunque che $\tilde{x}(t) = \gamma$, otteniamo che $\gamma = \frac{1}{3}$, quindi

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{3}.$$

Con $\beta = -1$, $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \\ -2c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases}$$

ottenendo $c_1 = -\frac{1}{5}$ e $c_2 = -\frac{2}{15}$.